Graphentheorie
Mathe-Club Klasse 5/6

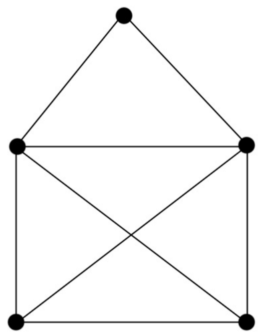
Thomas Krakow

Rostock, den 26. April 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Graphentheorie ist ein Teil der diskreten Mathematik. Ein Graph ist im Allgemeinen eine Figur wie das Haus vom Nikolaus. Eine mathematisch exakte Definition würde hier den Rahmen sprengen, da dazu noch einige Begriffe aus der Mengenlehre notwendig wären. Die Graphentheorie untersucht nun Gesetzmäßigkeiten die in so einen Graphen gelten.



Die schwarzen Punkte nennt man Knoten oder auch Ecken (engl.: knots, vertices), die Linien womit die Knoten untereinander verbunden sind nennt man Kanten (engl.: edges). In der Praxis finden Graphen eine Vielzahl von Anwendung. Stellt euch mal ihr wollt zum Brandenburger Tor und fahrt mit dem Zug nach Berlin. Der Zug hält nicht direkt am Brandenburger Tor sondern am Bahnhof. Um zum Brandenburger Tor zu kommen müsst ihr also noch ein Stück zu Fuß gehen. Nun würdet ihr gerne vorher schon wissen wie ihr gehen müsst um auf dem kürzesten Weg an euer Ziel zu gelangen. Wie findet man aber den kürzesten Weg? Der erste Schritt ist immer ein mathematisches Modell von dem Problem aufzustellen. Dies macht man am besten mit einem Graphen. Dazu nehmen wir uns ein Stadtplan von Berlin und zeichnen an jeder Stelle, wo eine Kreuzung ist einen Punkt. Diese Punkte sollen die Knoten von unseren Graphen bilden. Die Strassen sind dann die Kanten des Graphen. Es gibt Verfahren um alle [1] kürzesten Wege zu finden wovon wir einige kennen lernen werden. Jetzt folgen noch einige Aufgaben die man mit Hilfe der Graphtheorie lösen kann.

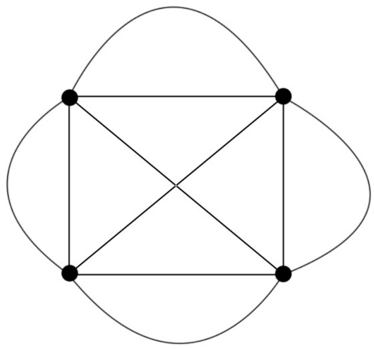
[1] Es muss nicht unbedingt nur einen kürzesten Weg geben, es kann eine Vielzahl von kürzesten Wegen geben.

Aufgabe 1 Bei einem Fußballturnier mit 30 Mannschaften spielt jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft genau einmal.

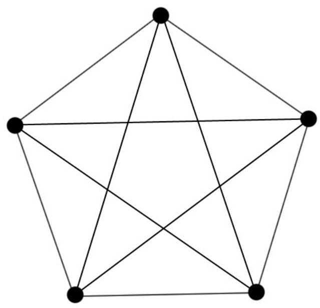
a) Wie viele Spiele werden insgesamt gespielt?

b) Man beweise, dass es zu jedem Zeitpunkt zwei Mannschaften gibt die die gleiche Anzahl an Spielen absolviert hat.

Aufgabe 2 Man zeichne die folgende Figur mit einem Stift ohne abzusetzen und ohne eine Kante doppelt zu zeichnen.



Aufgabe 3 Man zeichne die folgende Figur ohne dass sich die Linien kreuzen.



2 Grundbegriffe und einfache Sätze über Graphen

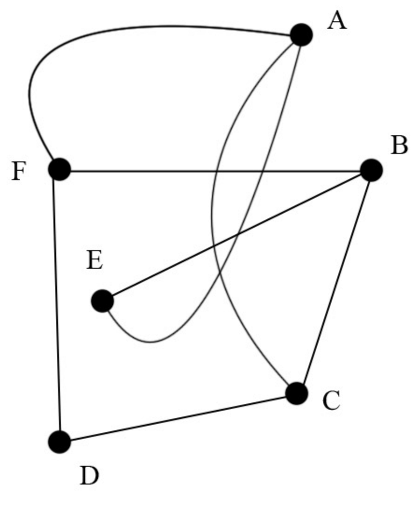
2.1 Der Knotengrad

Der Begriff des Knoten (Ecke) oder der Kante eines Graphen wurde in der Einleitung schon definiert.

Definition 1 *Zwei Knoten heissen **benachbart** (adjazent) wenn eine Kante die beiden Knoten verbindet. Endet eine Kante in einen Knoten, so sagt man, dass die Kante in den Knoten **inzidiert**.*

Definition 2 *Der **Grad** eines Knoten (wir nennen ihn mal K) oder auch der **Knotengrad** ist die Anzahl der in den Knoten endenden (inzidenten) Kanten, wir bezeichnen den Grad von K mit* $\deg(K)$ [1].

Beispiel



In diesem Graphen sind z.B. die Knoten E und B benachbart (adjazent), da es eine Kante gibt die beide Knoten miteinander verbindet. Die Knoten A und B sind dagegen

[1] Die Abkürzung deg kommt vom englischen Wort degree, was auf Deutsch Grad heisst.

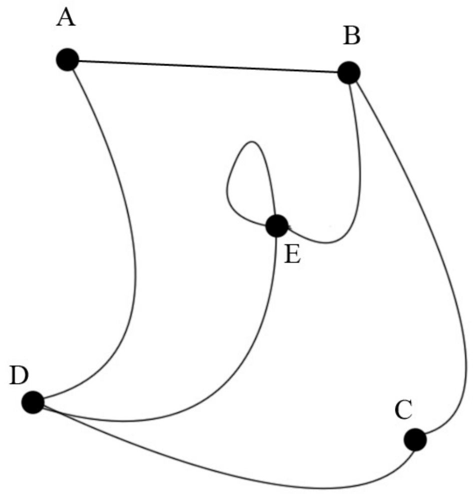
nicht benachbart, da die Knoten nicht durch eine Kante verbunden sind. Der Grad des Knoten C ist $\deg(C) = 3$, da drei Kanten in den Knoten enden. Jetzt noch mal eine Liste aller Knotengrade:
$\deg(A) = 3, \deg(B) = 3, \deg(C) = 3, \deg(D) = 2, \deg(E) = 2, \deg(F) = 3.$

Aufgabe Man zeichne einen Graphen mit 5 Knoten, so dass

a) $\deg(A) = 2, \deg(B) = 3, \deg(C) = 2, \deg(D) = 3, \deg(E) = 4$

b) $\deg(A) = 2, \deg(B) = 3, \deg(C) = 2, \deg(D) = 3, \deg(E) = 3$

Lösung
a)



b) Einen solchen Graphen gibt es nicht, warum sehen wir später.

Um herauszufinden warum es keinen Graphen gibt wie in Aufgabe b) müssen wir Beziehung die mit dem Knotengraden eines Graphen zusammenhängen kennen. Es sei G ein Graph (der Graph hat den Namen G, genauso wie man sein Haustier einen Namen gibt) mit n Knoten. n ist hier irgendeine Zahl, wir Bezeichnen eine Zahl mit einen Buchstaben, weil wir uns nicht dafür interessieren was das für eine Zahl ist. Der Graph G hat nun n Knoten. Diesen Knoten wollen wir auch Namen geben wir Nennen sie $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n$. Wenn wir uns nun eine Kante von G vorstellen, dann hat diese Kante zwei Enden. An den Enden sind Knoten. Diese Knoten müssen nicht unbedingt verschieden sein, wie der Knoten E beim Bild in Aufgabe a). Die Kanten erhöht den Knotengrad der Knoten um jeweils 1, falls diese Knoten gleich sind erhöht er den Knotengrad um 2. Wenn man nun die Summe aller Knotengrade bildet $K_1 + K_2 + \ldots + K_n$, so trägt eine Kante von G

genau 2 zum gesamten Knotengrad bei, da sie zwei Enden hat. Die Summe aller Knotengrade muss also zweimal so großs sein, wie die Anzahl der Kanten die G hat. Also muss $\deg(K_1) + \deg(K_2) + \ldots + \deg(K_n) = 2\cdot$(Anzahl der Kanten). Wir halten fest:

Satz 1 *In einen Graphen mit n Knoten $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n$ und v Kanten gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(K_i) = \deg(K_1) + \deg(K_2) + \ldots + \deg(K_n) = 2 \cdot v$$

***Bemerkung**: Ein Satz in der Mathematik ist nicht das gleich wie im Fach Deutsch. In der Mathematik ist ein Satz eine Aussage auf der man nicht unmittelbar kommt. In der Mathematik bemüht man sich solche Sätze zu finden. Um ein anderes Beispiel von einem bekannten Satz zu nennen ist: Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbär, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.*

Der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} \deg(K_i)$ bedeutet, das eine Summe gebildet wird. Die Summe läuft von 1 bis n, z.B. bedeutet $\sum_{i=3}^{7} i = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$ oder $\sum_{i=5}^{9}(i \cdot i) = 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 9 = 225$. Um mal den Vorteil der Schreibweise von so einer Summe zu zeigen; es gilt:

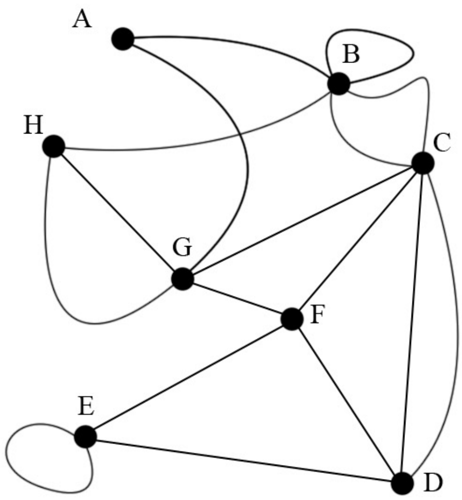
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2},$$

also die Summe der ersten n Zahlen.
Beispiel: $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 98 + 99 + 100 = \sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.

Wir kommen jetzt wieder zur Lösung von Aufgabe b) zurück. Aus Satz 1 wissen wir, dass die Summe der Knotengrade immer gerade ist, denn sie ist ja das Doppelte von der Anzahl der Kanten. In Aufgabe b) ist aber $\deg(A)+\deg(B)+\deg(C)+\deg(D)+\deg(E) = 2 + 3 + 2 + 3 + 3 = 13$. Die Zahl 13 ist aber ungerade, was nach Satz 1 unmöglich ist, also existiert kein solcher Graph.
In Aufgabe a) ist $\deg(A) + \deg(B) + \deg(C) + \deg(D) + \deg(E) = 2 + 3 + 2 + 3 + 4 = 14$, also könnte so ein Graph existieren. Die Zahl 14 ist ja nach Satz 1 gerade das Doppelte der Anzahl aller Kanten, somit muss der Graph der diese Bedingungen erfüllt 7 Kanten haben, da $7 \cdot 2 = 14$ ist.

2.2 Schlichte Graphen und vollständige Graphen

Wir wollen hier einige Anwendungen des Satzes aus 1.1 aufführen, dazu aber noch einige Definitionen. Wir schauen uns mal den Graphen den Graphen hier an.

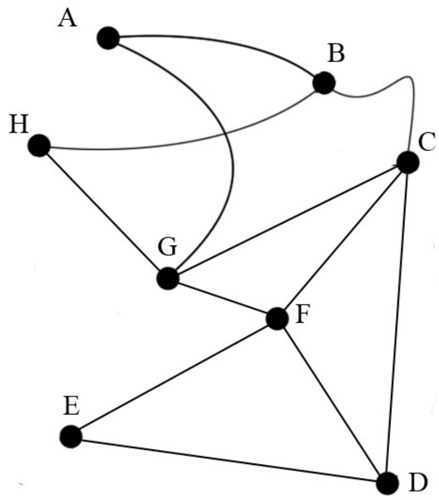


Wenn man sich den Knoten E anschaut, dann sieht man, dass dort eine Kante ist die in diesem Knoten startet und endet. Solche Kanten nennt man **Schlingen**. In diesem Graphen sind am Knoten E und am Knoten B Schlingen. Es fällt außerdm noch auf, dass vom Knoten H zum Knoten G zwei verschieden Kanten gehen. Solche Kanten nennt man **parallel**. Dies fassen wir noch mal in einer Definition zusammen.

Definition 3 *Beginnt und endet eine Kante in den gleichen Knoten, so nennt man diese Kante eine* ***Schlinge****. Haben zwei Kanten die gleichen Knoten an den Enden, so nennt man diese Kanten* ***parallel****.*

Definition 4 *Ein Graph ohne Schlingen und ohne parallele Kanten nennt man* ***schlicht****.*

Man kann aus einen Graphen immer einen schlichten Graphen machen, indem man alle Schlingen und alle parallelen Kanten entfernt. Der zu den oben gehörige schlichte Graph sieht folgendermaßen aus.



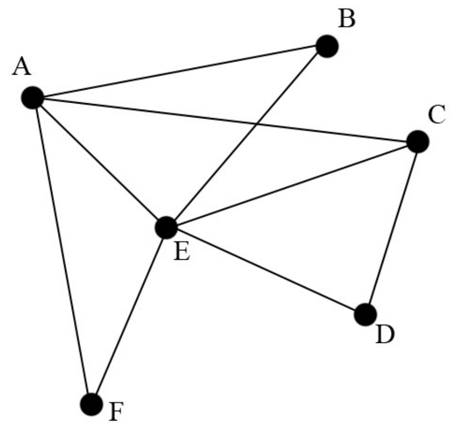
Ein weiterer schlichter Graph ist das Haus vom Nikolaus, falls man am Dach den Knoten an der Spitze mit dazu zählt.

Wir wollen nun einige Eigenschaften schlichter Graphen erarbeiten. Dazu definieren wir den minimalen und maximalen Knotengrad in einem Graphen. Wenn man von allen Graphen die Knotengrade aufschreibt, so gibt es einen kleinsten und einen größten Knotengrad. Den kleinsten dieser Knotengrade nennt man den minimalen Knotengrad, analog der größte dieser Knotengrade nennt man den maximalen Knotengrad. Wenn man eine Menge M von Zahlen gegeben hat, so bezeichnet man die kleinste dieser Zahlen mit $\min(M)$ bzw. die größte dieser Zahlen mit $\max(M)$.

Beispiel Sei $M = \{4, 8, 11, 7, 13, 3, 6\}$ eine Menge von Zahlen, dann ist $\min(M) = 3$ und $\max(M) = 13$.

Definition 5 *Sei G ein Graph mit n Knoten $K_1, K_2, \ldots, K_n$, dann bezeichnet man die Zahl* $\min\{\deg(K_1), \deg(K_2), \ldots, \deg(K_n)\}$ *als **minimalen Knotengrad**. Die Zahl* $\max\{\deg(K_1), \deg(K_2), \ldots, \deg(K_n)\}$ *heisst der **maximale Knotengrad**.*

Beispiel Gegeben sei der folgende Graph.

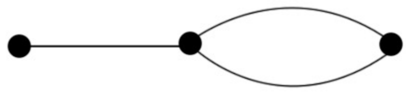


Wir setzen $M = \{\deg(A), \deg(B), \deg(C), \deg(D), \deg(E), \deg(F)\} = \{4, 2, 3, 2, 5, 2\}$. Der minimale Knotengrad ist dann $\min(M) = 2$ und der maximale Knotengrad ist dann $\max(M) = 5$.

Aufgabe: Man zeichne einen schlichten Graphen, der mindestens zwei Knoten hat und alle Knotengrade unterschiedlich sind.

Lösung: Es existiert kein schlichter Graph aus mindestens zwei Knoten, wobei alle Knotengrade voneinander verschieden sind. Das ist die Aussage des folgenden Satzes.

***Bemerkung**: Es gibt Graphen die nicht schlicht sind und wo alle Knotengrade voneinander verschieden sind. Als Beispiel diene der folgende Graph.*



Satz 2 *In einen schlichten Graphen, mit mindestens zwei Knoten, existieren zwei Knoten vom gleichen Grad.*

Beweis: Wir benutzen in diesem Beweis das Schubfachprinzip. Sei G ein schlichter Graph mit n Knoten. Wir suchen uns aus G einen beliebigen Knoten aus und nennen ihn K. Wir überlegen uns nun welches der größte Grad ist den K haben kann. Wenn man K mit jedem anderen Knoten verbindet, so hat er den Grad $n-1$ (er kann ja nicht mit sich selbst verbunden werden, da das sonst eine Schlinge wäre, was nicht geht, da G schlicht ist). Wir können dann keine weiter Kante hinzufügen, die bei K startet, da wir sonst parallele Kanten hätten. Wir haben K beliebig gewählt, d.h. irgendein Knoten kann höstens den Grad $n-1$ haben. Der größtmögliche maximale Knotengrad ist also $n-1$. Der kleinste mögliche minimale Knotengrad ist offensichtlich 1. [2] Nun haben wir höchstens $n-1$ verschiedene Knotengrade. Nun stelle man sich $n-1$ Schubladen vor. In der ersten Schublade packen wir alle die Knoten die den Knotengrad 1 haben. In der zweiten Schublade packen wir alle die Knoten die den Knotengrad 2 haben, u.s.w. . Wir teilen also n Knoten auf $n-1$ Schubladen auf. Nun sind mehr Knoten als Schubladen vorhanden, also kommt in eine Schublade mindestens 2 Knoten. Jede Schublade stand ja für den Knotengrad der Knoten die in der Schublade sind. In einer Schublade sind ja mindestens zwei Knoten, also haben die Knoten die in dieser Schublade sind den gleichen Knotengrad. Damit ist der Satz bewiesen.

Nun können wir Aufgabe 1 b) aus der Einleitung lösen.

Aufgabe 1 Bei einem Fußballturnier mit 30 Mannschaften spielt jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft genau einmal.

a) Wie viele Spiele werden insgesamt gespielt?

b) Man beweise, dass es zu jedem Zeitpunkt zwei Mannschaften gibt die die gleiche Anzahl an Spielen absolviert hat.

Lösung zu 1b) Wir müssen das Problem erstmal in einen Graphen umwandeln. Die Mannschaften sind die Knoten. Wenn zwei Mannschaften gegeneinander gespielt haben werden die entsprechenden Knoten miteinander verbunden. So erhalten wir einen Graphen. Um Satz 2 anwenden zu können müssen wir noch zeigen, dass der entstandene Graph schlicht ist. Eine Schlinge in diesem Graphen würde bedeuten, dass die Mannschaft gegen sich selbst spielt. Das ist aber nicht möglich, also hat der Graph keine Schlingen. Parallele Kanten in diesem Graphen würde bedeuten, dass zwei Mannschaften mehr als einmal gegeneinander gespielt haben. Es soll aber jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal spielen, also gibt es auch keine parallelen Kanten, somit ist der Graph schlicht. Nach Satz 2 existieren also zwei Knoten die den gleichen Grad haben. Der Knotengrad bedeutet ja gerade wie viele Kanten in diesen Knoten enden. Eine Kante zwischen zwei Knoten wurde gezeichnet, wenn die entsprechenden Mannschaften gegeneinander gespielt haben. Der Knotengrad gibt also an wie viele spiele die entsprechende Mannschaft gespielt hat. Somit existieren zwei Mannschaften die die gleiche Anzahl an

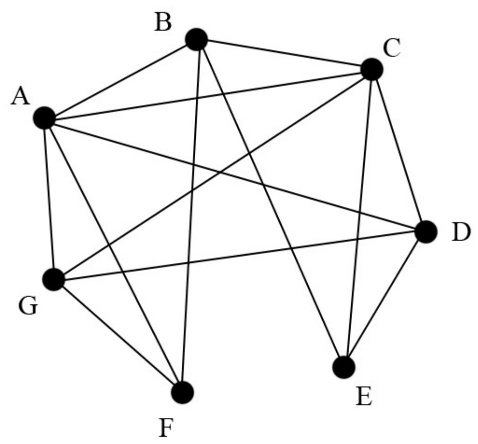
[2] Das gilt nur wenn man G als zusammenhängend voraussetzt, dies darf man aber o.B.d.A. annehmen, da man einfach nur eine Komponente betrachten kann. Der Begriff des Zusammenhanges wird im nächsten Abschnitt definiert.

spielen absolviert hat.

Beispiel: Wir werden diese Lösung an einen Beispiel erläutern. Die Mannschaften seien A,B,C,D,E,F,G. Folgende Spiele sind bereits gespielt worden.

A-B	B-C	C-D	D-E	F-G
A-C	B-E	C-E	D-G	
A-D	B-F	C-G		
A-F				
A-G				

Dieser Graph veranschaulicht die gespielten Spiele. Man sieht, dass die Mannschaften E und F jeweils drei Spiele absolviert hat.

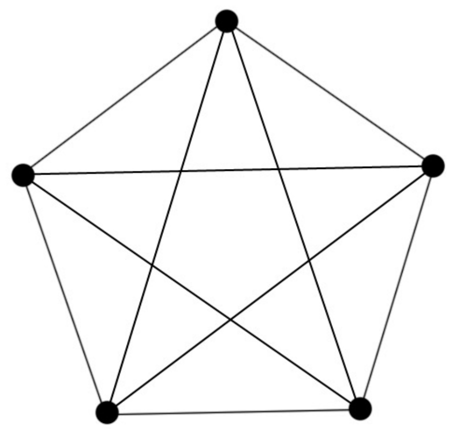


Lösung zu 1a) Wenn man sich den Graphen dieses Turnieres vorstellt, so ist jeder Knoten mit jedem anderen Knoten verbunden, da jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft gespielt hat. Jede Mannschaft hat gegen 29 andere Mannschaften gespielt, somit ist der Knotengrad jedes Knoten 29. Jede Kante steht gerade für ein absolviertes Spiel, wir müssen also die Anzahl der Kanten in diesen Graphen bestimmen. Nach Satz 1 ist $\sum_{K_i \in G} \deg(K_i) = 2v$, wobei v die Anzahl der Kanten ist. Somit ist $\sum_{K_i \in G} \deg(K_i) = 30 \cdot 29 = 870 = 2v$. Es wurden als 435 Spiele absolviert.

Wir wollen das Ergebnis aus Aufgabe 1a) verallgemeinern. Wir benötigen noch eine Definition.

Definition 6 *Ein Graph heisst **vollständig**, wenn er schlicht ist und jeder Knoten zu jeden anderen Knoten benachbart ist. Ein vollständiger Graph mit n Knoten wird auch mit K_n bezeichnet.*

Hier ist eine Beispiel eines vollständigen Graphen mit 5 Knoten.



Satz 3 *Der vollständige Graph K_n hat $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten.*

Beweis: Nach der Definition ist der K_n schlicht, er besitzt also keine Schlingen und keine parallelen Kanten, außerdem ist jeder Knoten mit jeden anderen Knoten durch genau eine Kante verbunden. Der Grad jedes Knoten ist also $n-1$. Nach Satz 1 ist

$$2v = \sum_{i=1}^{n} \deg(K_i) = \sum_{i=1}^{n} (n-1) = n(n-1),$$

wobei v die Anzahl der Kanten in K_n ist. Aus dieser Gleichung ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

Aufgabe: Wie viele Diagonalen hat ein n-Eck?

Lösung: Man kann ein n-Eck mit seinen Diagonalen auch als den vollständigen Graphen K_n auffassen. Nach Satz 3 hat der K_n $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten. Die Seiten eines n-Ecks werden als Diagonalen nicht mitgezählt. Ein n-Eck hat n Seiten, also hat er $\frac{n(n-1)}{2} - n$ Diagonalen. Man kann diesen Ausdruck noch vereinfachen zu $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2-n-2n}{2} = \frac{n^2-3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$. Ein 1000-Eck hat z.B. $\frac{1000 \cdot 997}{2} = 498500$ Diagonalen.

2.3 Wege und Zusammenhang

Wenn man Probleme aus der Praxis in einen Graphen modelliert, so sind spezielle Wege ein interessanter Untersuchungsgegenstand. Man interessiert sich z.B. für den kürzesten

Weg oder wie viele Wege es von einen Knoten zu einen anderen Knoten gibt. Diese Probleme treten bei der Programmierung von Navigationssytemen auf. Es wird sogar noch viel allgemeiner verwendet, z.B. bei der Beschreibung von Computernetzwerken, Leiterplatten in elektronischen Geräten oder beim verlegen von Rohleitungen. Die Grundlagen für diese Problemstellungen sollen in diesen Abschnitt dargelegt werden.

Definition 7 *Eine **Kantenfolge** in einem Graphen ist eine endliche Folge*

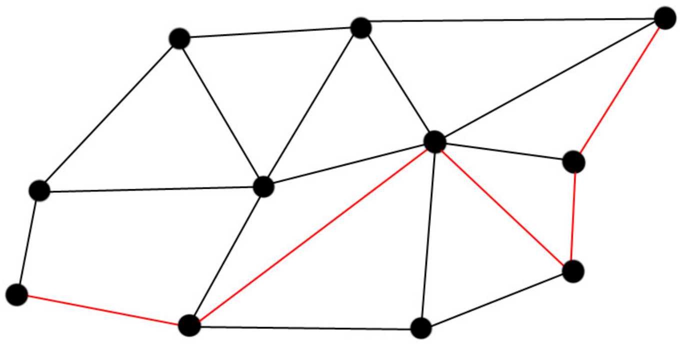
$$K_0 v_0 K_1 v_1 K_2 \ldots v_{n-1} K_n$$

deren Terme abwechselnd Knoten und Kanten sind, wobei an den Enden der Kante v_i die Knoten K_i und K_{i+1} sind. Die Anzahl der Kanten in der Kantfolge ist deren Länge.

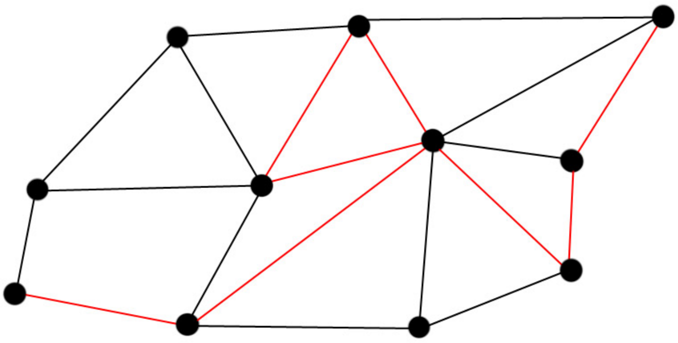
Definition 8 *Ein **Kantenzug** ist eine Kantenfolge deren Kanten alle unterschiedlich sind.*

Definition 9 *Ein **Weg** ist eine Kantenzug deren Knoten alle unterschiedlich sind.*

Zur Veranschaulichung dieser Definitionen sei hier das Bild eines Weges gegeben.



Hier ist ein Kantenzug der kein Weg ist, da nicht jeder Knoten höchstens einmal durchlaufen wird.



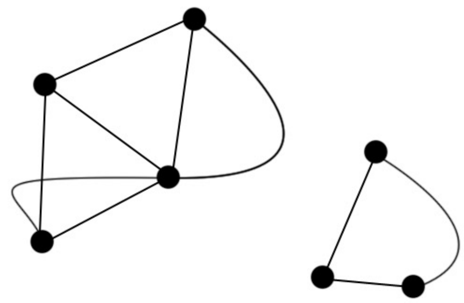
Satz 4 *Jede Kantenfolge von U nach V enthält einen Weg von U nach V.*

Beweis: Sei die Kantenfolge von U nach V gegeben durch die Folge $Uv_0K_0v_1K_1\dots v_nK_nv_{n+1}V$. Sind in dieser Kantenfolge zwei Knoten K_i und K_j identisch, so entfernt man das Stück $v_{i+1}K_{i+1}\dots v_jK_j$ aus der Folge.

$$Uv_0K_0v_1K_1\dots v_iK_iv_{i+1}K_{i+1}\dots v_jK_j\dots K_nv_nK_nv_{n+1}V \to Uv_0K_0v_1K_1\dots v_iK_i\dots K_nv_nK_nv_{n+1}V.$$

Da $K_i \equiv K_j$ ist und K_j zu K_{j+1} benachbart ist, ist auch K_i zu K_{j+1} benachbart, somit ist die neu entstandene Kantenfolge wieder eine Kantenfolge. Man führt diese Verfahren solange fort bis der Kantenzug keine identischen Knoten enthält. wir müssen nur noch zeigen, dass in dieser Kantenfolge keine zwei Kanten identisch sind. Angenommen zwei Kanten wären identisch, dann auch deren Endknoten. Die Kantenfolge enthält aber keine zwei identischen Knoten, somit auch keine zwei identischen Kanten. Somit ist die Kantenfolge ein Kantenzug und da alle Knoten verschieden sind auch ein Weg.

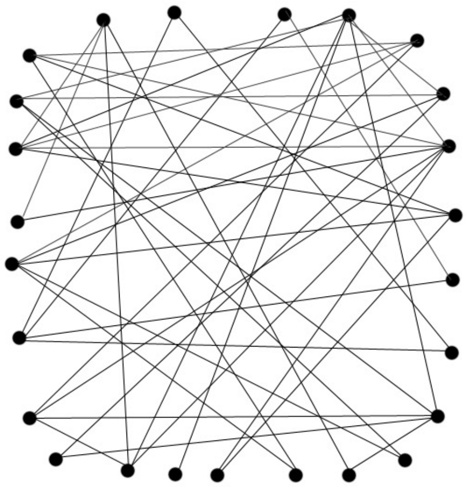
Wir wollen jetzt den Begriffe des Zusammenhanges definieren. Man versteht unter dem Zusammenhang, dass der Graph irgendwie zusammen ist, also nicht in getrennte Teile zerfällt. Man könnte doch zwei beliebige Graphen nehmen und es als einen Graphen definieren. Man hat dann mindestens zwei Komponenten. Ein Beispiel eines nicht zusammenhängenden Graphen ist



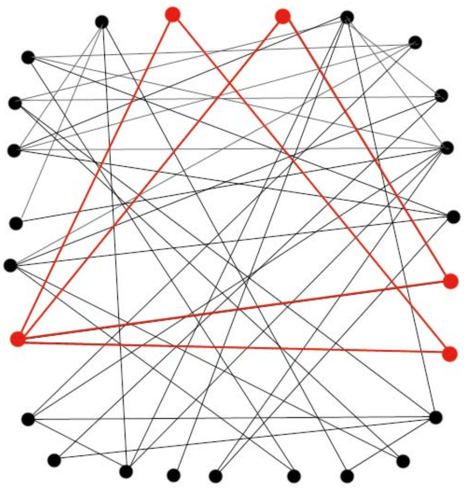
Dieser Graph besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten. Man sieht auch leicht ein, dass es zwischen den Knoten aus diesen Komponenten kein Weg gibt. Dies führt zu der folgenden Definition.

Definition 10 *Ein Graph heisst* ***zusammenhängend****, wenn je zwei verschiedene Knoten durch einen Weg verbunden werden können.*

In den obigen Graphen war es nicht schwer zu erkennen, dass er nicht zusammenhängend ist und das er aus zwei Komponenten besteht. Im Allgemeinen ist es aber nicht so einfach zu erkennen, ob ein Graph zusammenhängend ist wie der folgende Graph zeigt.



Dieser Graph ist nicht zusammenhängend und besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten. Schwieriger wird es den Zusammenhang zu bestimmen wenn man nur Informationen über die Anzahl der Kanten oder über die Knotengrade hat. Hier sind die Zusammenhangskomponenten noch einmal hervor gehoben.



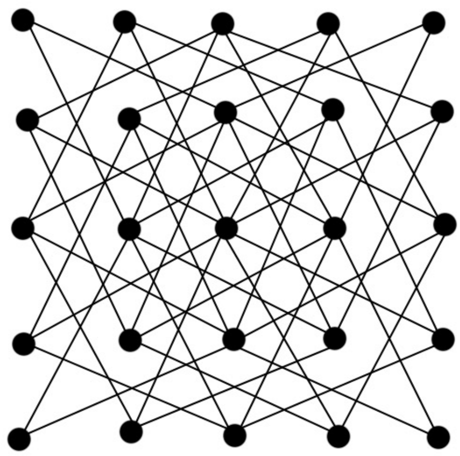
Aufgabe: Gegeben sei ein 5x5-Schachbrett.

a) Wie viele verschiedene Züge kann man mit einen Springer auf den Schachbrett durchführen?

b) Man beweise, dass man mit einen Springer von jedem Feld zu jeden anderen Feld gelangt.

Hinweis zu a): *Zwei Züge gelten als verschieden, wenn entweder die Startfelder oder die Zielfelder verscheiden sind.*

Lösung zu a): Als erstes muss man dieses Problem mathematisch Modellieren. Dies tut man am besten mit einen Graphen. Die Knoten sind die Felder. Zwischen zwei Knoten wird genau dann eine Kante gesetzt, wenn der Springer in einem Zug von den einen Knoten zum anderen wechseln kann. Dieser Graph sieht folgendermaßen aus.



Eine Kante steht gerade für zwei verschiedene Züge, einmal von den einen Feld zum anderen und umgekehrt, also ist die Anzahl der verschiedenen Züge gleich dem doppeltem der Anzahl der Kanten. Nach Satz 1 ist das Doppelte der Kanten gleich der Summe aller Knotengrade, also

$$2v = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 8 = 96$$

Auf einen 5x5-Schachbrett kann man mit einem Springer 96 verschiedene Züge machen.

Lösung zu b): Wir benutzen die Modellierung von Lösung a). Kann man mit einem Springer von einem Feld zu einen anderen gelangen, so muss es eine Kantenfolge geben die diese Knoten enthält. Nach Satz 4 enthält jede Kantenfolge zwischen zwei Knoten einen Weg zwischen diesen Knoten. Diese beiden Knoten können also durch einen Weg verbunden werden. Wenn man nun von jedem Feld zu jedes andere Feld gelangen kann, dann muss der entsprechende Graph zusammenhängend sein. Wir müssen also zeigen, dass der o.g. Graph zusammenhängend ist. Nach der Definition müsste man zu je zwei verschiedenen Knoten einen Weg zwischen diesen Knoten finden, also 300 Wege. [3]

Wir geben im Folgenden einen Algorithmus mit dem man bestimmen kann, ob ein Graph zusammenhängend ist oder nicht.

Schritt 1: Man färbe einen beliebigen Knoten.

[3] Es würde ausreichen eine Kantenfolge zu finden die alle Knoten enthält und so eine Kantenfolge findet man gewiss.

Schritt 2: Man färbe alle benachbarten Knoten von bereits gefärbten Knoten.

Schritt 3: Man wiederhole Schritt 2 solange bis keine weiteren Knoten mehr gefärbt werden.

Schritt 4: Alle gefärbten Knoten bilden eine Komponente des Graphen.

Wenn also alle Knoten gefärbt sind, so ist der Graph zusammenhängend.

Satz 5 *Bei den oben beschriebenen Algorithmus sind genau dann alle Knoten gefärbt, wenn der Graph zusammenhängend ist.*

Beweis: Wir haben zu zeigen, dass zwischen zwei Knoten ein Weg existiert. Seien A, B zwei Knoten des Graphen. Diese beiden Knoten sind nach Abschluss des Algorithmus' gefärbt, da nach Vorraussetzung alle Knoten gefärbt sind. Sei nun X der Knoten der durch Schritt 1 gefärbt worden ist. Nun gibt es eine Folge von Knoten $XK_1K_2\dots K_nA$ und $XK_1'K_2'\dots K_n'B$, so dass K_i und K_{i+1} bzw. K_i' und K_{i+1}' benachbart sind. Diese Folge ist also eine Kantenfolge. Wir bilden nun die Kantenfolge $AK_n\dots K_2K_1XK_1'K_2'\dots K_n'B$ die nach Satz 4 einen Weg enthält. Es existiert also eine Weg zwischen A und B. Da A und B beliebig waren existiert zu je zwei Knoten ein Weg der diese Knoten miteinander verbindet, folglich ist der Graph zusammenhängend. Sei der Graph nun zusammenhängend, dann existiert zwischen zwei verschiedenen Knoten ein Weg. Färbt man durch Schritt 1 einen beliebigen Knoten, so sind nach Beendigung alle Knoten gefärbt, da zwischen den Startknoten und einen weiteren Knoten ein Weg existiert. Da dieser Weg eine Folge benachbarter Knoten ist werden alle Knoten gefärbt.

Durch Anwendung des Algorithmus' stellt man fest, dass der Graph aus Aufgabe b) zusammenhängend ist. [4]

Aufgabe: 35 Mädchen und 35 Jungen sitzen an einen runden Tisch. Man beweise, dass es eine Person gibt die zwei Mädchen als Nachbarn hat.

Lösung: Hier ist das Problem einen geeigneten Graphen zu finden. Die Knoten sind die 70 Personen. Zwei Knoten werden durch eine Kante verbunden, wenn genau eine Person zwischen ihnen sitzt. Man findet leicht heraus, dass der entstehende Graph nicht zusammenhängend ist. Der Graph zerfällt in zwei Komponenten zu mit je 35 Knoten. Nun färben wir die Knoten rot (für Mädchen) und blau (für Jungen). In einer Komponente müssen dann mindesten 18 rote Knoten sein. Die Frage kann nun so formuliert werden: Gibt es bei jeder Anordnung der roten Knoten zwei die benachbart sind? Wir nehmen uns die Komponente mit mindestens 18 roten Knoten und ordnen sie folgendermaßen um. Man färbe jeden zweiten Knoten rot. Dies kann man 17-mal machen. Den 18-ten Knoten

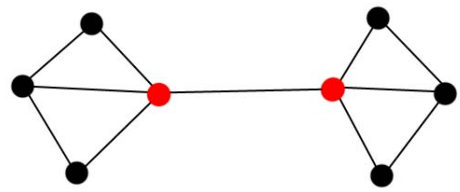
[4] Man kann sogar beweisen, dass man höchstens vier Züge benötigt um von einem Feld zu einem anderen Feld zu gelangen.

müssen wir dann folglich zwischen zwei bereits rot gefärbten Knoten setzen. Somit ist die Aussage bewiesen. [5]

Definition 11 *Sei G ein Graph und K ein Knoten, dann ist $G-K$ der Graph der durch entfernen des Knoten K und aller in ihn endenden Kanten entsteht.*

Definition 12 *Sei G ein Graph. Ein Knoten K von G heisst* ***Zerlegungsknoten****, wenn $G-K$ nicht zusammenhängend ist.*

Hier ist ein Beispiel eines Graphen mit zwei Zerlegungsknoten. Die rot markierten Knoten sind Zerlegungsknoten.



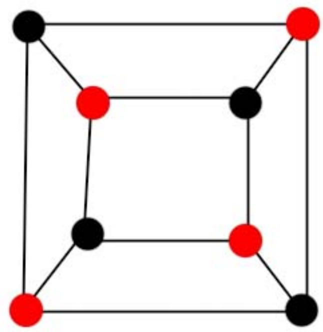
2.4 Paare Graphen, Zyklen

Man betrachtet folgende Situation. Auf einen Tanzabend tanzen Mädchen mit Jungen. Wir wollen diese Situation durch einen Graphen beschreiben. Die Knoten dieses Graphen sind die Mädchen und die Jungen. Zwei Knoten sind genau dann benachbart, wenn die entsprechenden Personen miteinander getanzt haben. Man kann die Knoten des entstandenen Graphen, so schwarz bzw. weiss färben, so dass jede Kante einen schwarzen und einen weissen Endknoten hat. Man braucht doch nur der Knoten der für ein Mädchen steht weiss und die die für einen Jungen stehen schwarz färben. Graphen bei der so eine Färbung der Knoten existiert nennt man paar oder biparit.

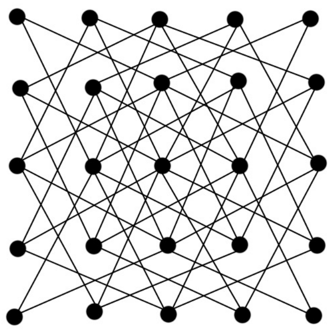
Definition 13 *Ein Graph heisst* ***paar*** *oder* ***biparit****, wenn man die Knoten so mit zwei verschiedenen Farben färben kann, so dass die Endknoten einer Kante unterschiedliche Farben haben.*

[5] Man hat sogar noch viel mehr gezeigt. man hat gezeigt, dass es eine Person gibt die 2 Jungen als Nachbarn hat.

Der 3-dimensionale Würfel ist ein Beispiel eines paaren Graphen.



Aufgabe: Man betrachte den entstehenden Graphen der Schachbrettaufgabe aus Abschnitt 2.3. Man beweise, dass der Graph paar ist.



Lösung: Es ist allgemein bekannt, dass ein Springer nach jedem Zug die Farbe des Feldes ändert auf die er steht. Man färbe die Knoten, nach der Farbe des Feldes auf der sie stehen. Ein Zug des Springers entspricht gerade einer Kante. Der Springer ändert nach jedem Zug die Untergrundfarbe, somit hat jede Kante unterschiedliche Farbe.

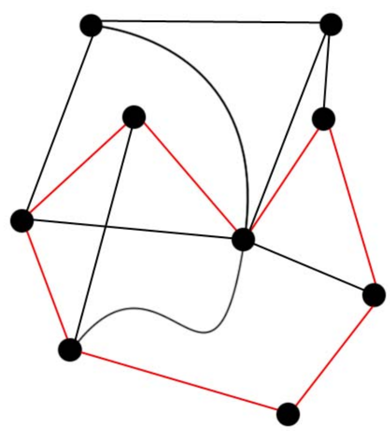
Satz 6 *Sei G ein paarer Graph und U, V zwei Knoten gleicher Farbe. Ein Weg von U nach V hat dann eine gerade Länge.*

Der Beweis wird mittels vollständiger Induktion geführt. Bei der vollständigen Induktion geht man davon aus, dass eine Aussage schon für alle natürlichen Zahl die kleiner gleich einer vorgegeben Zahl n sind bewiesen worden. Man zeigt dann, dass die Aussage auch für den Nachfolger $n+1$ gilt. Zum Abschluss muss man die Aussage noch für einen konkreten Zahlenwert beweisen.

Beweis: O.B.d.A. seien U, V schwarz gefärbt und die andere Farbe sei weiss. Der Beweis geschieht mittels vollständiger Induktion. Wir nehmen dazu an die Aussage sei schon für alle Wege der Länge n bewiesen. Es muss als n gerade sein. Sei nun $UK_1 \dots K_n$ ein Weg der Länge n. U und K_n sind also beide schwarz. Alle zu K_n benachbarten Knoten sind weiss gefärbt, da der Graph paar ist. Sei K_{n+1} ein benachbarter Knoten von K_n, dann ist $UK_1 \dots K_nK_{n+1}$ ein Weg ungerader Länge, wobei der Anfangsknoten und der Endknoten unterschiedliche Farbe haben. Sei nun V ein zu K_{n+1} benachbarter Knoten, dann ist V schwarz gefärbt, da der Graph paar ist. Der Weg $UK_1 \dots K_nK_{n+1}V$ hat dann gerade Länge, wobei der Anfangsknoten und der Endknoten schwarz sind. Für die vollständige Induktion muss noch ein Beispiel angegeben werden. Der Weg der Länge Null ist ein Weg mit gerader Länge und gleichfarbigen Anfangsknoten und Endknoten.

Definition 14 *Ein* ***Zyklus*** *oder ein* ***Kreis*** *ist ein Weg dessen Startknoten und Endknoten identisch sind.*

Im folgenden Graphen ist ein Beispiel eines Kreises rot eingezeichnet.



Es gilt folgender Satz, dessen Beweis wir hier übergehen wollen.

Satz 7 *Ein Graph ist genau dann paar, wenn alle seine Zyklen eine gerade Länge haben.*

Dieser Satz sagt aus, dass ein paarer Graph nur Zyklen gerader Länge enthält. Dies folgt unmittelbar aus Satz 6. In diesem Satz gilt aber auch die Umkehrung. Wenn ein Graph nur Zyklen gerader Länge enthält, dann ist der Graph paar. Im Folgenden wird ein Algorithmus angegeben, der entscheidet ob ein Graph paar ist.

Schritt 1: Man färbe einen beliebigen Knoten schwarz.

Schritt 2: Man färbe alle benachbarten Knoten von schwarzen Knoten weiss.

Schritt 3: Man färbe alle benachbarten Knoten von weissen Knoten schwarz.

Schritt 4: Man wiederhole die Schritte 2 und 3 bis man einen bereits gefäbten Knoten wieder umgefärbt hat, oder alle Knoten schwarz bzw. weiss gefärbt hat. Hat man einen Knoten umgefärbt, so ist er nicht paar. Sind alle Knoten schwarz bzw. weiss gefärbt, so ist der Graph paar.

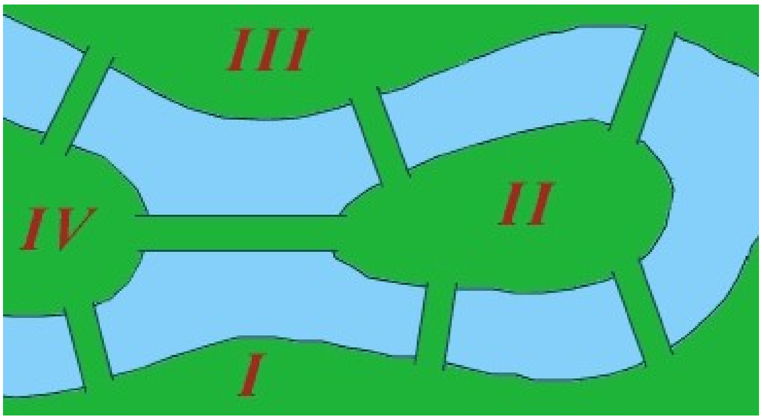
Im Folgenden wollen wir beweisen, warum der Algorithmus funktioniert. Nach jedem zweiten Schritt färbt man die Knoten in der gleichen Farbe, also nach einer geraden bzw. ungeraden Anzahl an Schritten. Färbt man dabei einen bereits gefärbten Knoten um, so enthält er einen Kreis mit ungerader Länge und ist somit nicht paar. Sind alle Knoten gefärbt ohne dass eine Umfärbung geschehen ist, so enthält der Graph nur Kreise gerader Länge er ist also paar.

3 Eulersche und Hamiltonsche Graphen

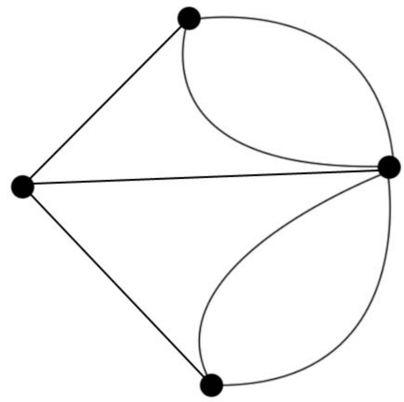
3.1 Das Königsberger Brückenproblem

Das Königsberger Brückenproblem ist ein Problem welches 1736 von Leonard Euler gelöst worden ist.

In Königsberg, dem heutigen Kaliningrad gabelt sich der Fluss Pregel und umfließt eine Insel die mit Brücken zum Festland verbunden ist, wie im folgenden Bild dargestellt.



Das Problem besteht nun darin einen Weg zu finden wie man alle Brücken genau einmal überqueren kann und zum Ausgangspunkt wieder zurück zu kehren. Euler fand heraus, dass dieses Problem keine Lösung besitzt. Er formulierte sogar allgemeinere Kriterien dafür, ob es so einen Weg gibt. Er modellierte das Problem in einem Graphen. In diesem Graphen sind die Knoten die durch den Fluss getrennten Landmassen. Jede Kante steht für eine Brücke. Der entstehende Graph sieht folgendermaßen aus



Es ist also ein Kantenzug gesucht, wobei der Startknoten und der Endknoten identisch sind und der jede Kante genau einmal enthält. Ein Graph der einen solchen Kantenzug enthält nennt man auch Eulersch.

3.2 Eulersche Graphen

Ausgehend von dem Problem aus dem vorigen Abschnitt definieren wir noch einige Begriffe.

Definition 15 *Sei G ein Graph. Ein Kantenzug heisst ein* ***Eulerscher Kantenzug****, wenn er jede Kante von G enthält.*

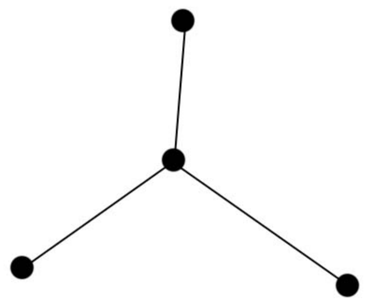
Definition 16 *Eine Kantenfolge heisst* ***geschlossen*** *wenn der Startknoten und der Endknoten übereinstimmen, andernfalls heisst sie* ***offen****.*

Definition 17 *Sei G ein Graph. Eine* ***Tour*** *ist eine geschlossene Kantenfolge die jede Kante von G mindestens einmal enthält.*

Definition 18 *Eine* ***Eulersche Tour*** *ist eine Tour die jede Kante genau einmal enthält.*

Definition 19 *Ein Graph der eine Eulersche Tour besitzt nennt man* ***Eulersch****.*

Um zum Königsberger Brückenproblem zurück zu kehren. Die Frage ist also, ob der entsprechende Graph Eulersch ist. Wir formulieren dieses Problem allgemeiner und fragen uns wann ein Graph Eulersch ist. In einem Graphen muss noch nicht einmal ein offener Eulerscher Kantenzug sein, wie das folgende Beispiel zeigt.



Satz 8 *Sei G ein Graph der einen Eulerschen Kantenzug E enthält. Ein Knoten von E der kein Start- bzw. Endknoten ist hat einen geraden Knotengrad.*

Beweis: Sei U ein Knoten von G der kein Start- bzw. Endknoten von E ist. Nun ist E ein Eulerscher Kantenzug, er enthält also jede Kante genau einmal. Wenn man nun durch eine Kante zu U gelangt, so muss man U über eine andere Kante verlassen. Bei jeder Ankunft und bei jedem verlassen von U benutzt man zwei verschiedene Kanten.

Jede dieser Kanten trägt also genau zwei zum Knotengrad von U bei. Somit hat U einen geraden Knotengrad.

Im Folgenden werden wir noch einige Folgerungen anführen.

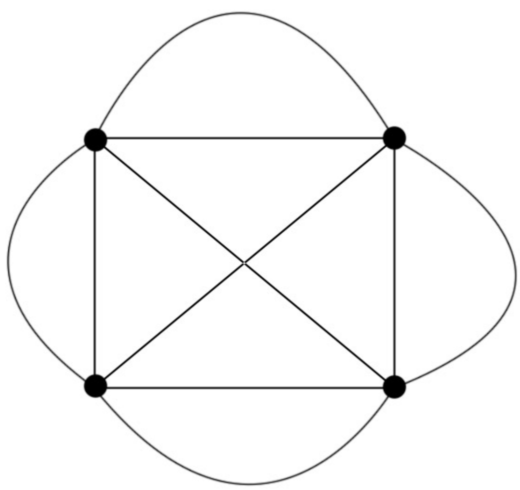
Korollar 1 *Ein Graph der einen offenen Eulerschen Kantenzug enthält hat genau zwei Knoten ungeraden Grades.*

Beweis: Aus dem Beweis von Satz 8 folgt, dass nur der Startknoten und der Endknoten einen ungeraden Knotengrad haben.

Korollar 2 *Ein Eulerscher Graph besteht nur aus Knoten mit einem geraden Knotengrad.*

Beweis: In einem Eulerschen Graphen, fallen Start- und Endknoten des Eulerschen Kantenzuges zusammen. Somit hat dieser Knoten einen geraden Knotengrad.

Satz 8 und deren Korollare geben nur notwendige Bedingungen für die Existenz von Eulerschen Kantenzügen bzw. Touren. Es ist also so, dass ein Eulerscher Graph nur aus Knoten mit einem geraden Knotengrad bestehen. Es ist aber nicht gesagt, dass ein Graph von dem alle Knoten einen geraden Knotengrad haben auch Eulersch ist. Das Gleiche gilt für den offenen Eulerschen Kantenzug.
Nun können wir die zweite Aufgabe aus der Einleitung lösen.



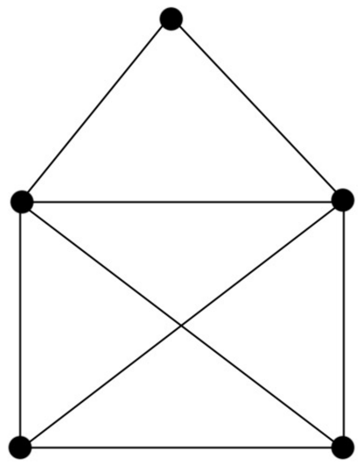
Die Frage, ob man den oben aufgeführten Graph so zeichnen kann ohne den Stift abzusetzen ist offensichtlich gleichwertig mit der Aussage, dass der Graph einen offenen Eulerschen Kantenzug besitzt. Nach Korollar 1 muss der Graph genau zwei Knoten ungeraden Grades haben, was auf den oben aufgeführten Graphen nicht zutrifft. Der Graph lässt sich also nicht in der beschriebenen Form zeichnen.

Aufgabe: Bei welchem Knoten muss man bei dem Haus vom Nikolaus starten um es

(i) ohne den Stift abzusetzen;

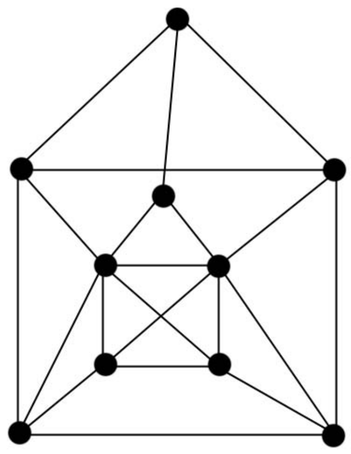
(ii) ohne Kanten doppelt zu zeichnen;

zeichnen kann.



Lösung: Nach Korollar 1 sind der Start- und der Endknoten die einzigen Knoten mit einem ungeraden Knotengrad. Man muss als bei einen der beiden unteren Knoten starten.

Aufgabe: Man untersuche, ob sich der folgende Graph, wie oben beschrieben zeichnen lässt.



Lösung: Die Aussage ist offensichtlich damit äquivalent, einen Eulerschen Kantenzug zu finden. Notwendig ist es nach Korollar 1, dass es zwei Knoten mit ungeradem Knotengrad existieren. Dieser Graph hat genau zwei Knoten mit ungeraden Knotengrad, somit wäre ein Eulerscher Kantenzug offen. Korollar 1 sagt aber nicht aus, dass so ein Eulerscher Kantenzug existiert. Man muss einen Eulerschen Kantenzug durch probieren finden oder beweisen, dass es keinen gibt. Im Folgenden werden wir aber sehen, dass Korollar auch hinreichend ist. Hinreichend heisst, dass wenn die Bedingung erfüllt ist auch ein Eulerscher Kantenzug existiert.

Satz 9 *Sei G ein Graph. Gilt für alle Knoten K aus G, $\deg(K) \geq 2$, so enthält G einen Zyklus.*

Beweis: Ist der Graph nicht schlicht, so enthält G einen Zyklus, da jede Schlinge und jedes paar von parallelen Kanten einen Zyklus darstellt. Sei G also schlicht. Wir wählen einen beliebigen Knoten K_0. Nun ist $\deg(K_0) \geq 2$, es existiert somit also ein Knoten K_1 der mit K_0 benachbart ist. Weiter existiert ein Knoten $K_2 \neq K_0$ der mit K_1 benachbart ist, da auch $\deg(K_1) \geq 2$ ist. Dies können wir nun solange fortführen bis wir an einen Knoten K_n angelangen der mit K_{n-1} benachbart ist und sonst nur mit Knoten aus dem Kantenzug $K_0K_1 \ldots K_{n-1}$ benachbart ist, da G nur endlich viele Knoten enthält. K_n ist durch eine Kante die nicht in $K_0K_1 \ldots K_{n-1}$ vorkommt mit einem Knoten K_i aus $K_0K_1 \ldots K_{n-1}$ benachbart. Der Kantenzug $K_i \ldots K_{n-1}$ enthält einen Weg, somit ist der Weg $K_i \ldots K_{n-1}K_i$ ein Zyklus.

Satz 10 *Ein Graph ist genau dann Eulersch, wenn er zusammenhängend ist und die Knotengrade aller Knoten gerade sind.*

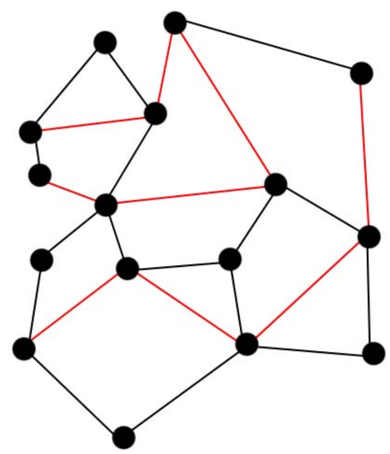
Beweis: Sei G ein Eulerscher Graph. Nach Korollar 2 hat G nur Knoten mit einem geraden Knotengrad. Wir müssen also noch die Umkehrung beweisen. Sei G ein Graph der nur Knoten mit einem geraden Knotengrad enthält. Wir beweisen dies mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der Kanten eines Graphen. Wir nehmen an, dass dies für alle zusammenhängenden Graphen mit weniger als n Kanten gilt. Wir müssen zeigen, dass dies dann auch für einen Graphen mit n Kanten gilt. Nach Satz 9 existiert in G ein Zyklus, wir nennen ihn C. Entfernen wir nun jede Kante aus G die auch in C enthalten ist, so entsteht ein neuer Graph G' der nicht unbedingt zusammenhängend sein muss. Ein Zyklus ist selbstverständlich Eulersch, er enthält also nur Knoten mit einem geraden Knotengrad. G' enthält also nur Knoten mit einem geraden Knotengrad. Nach Vorraussetzung ist jede Komponente aus G' Eulersch, da G' weniger als n Kanten enthält. Wir wählen aus G nun einen Knoten aus der auch in C enthalten ist. Wir gehen C nun einmal rum. Kommen wir an einem Knoten an der in einer Komponente von G' enthalten ist, so gehen wir die Eulersche Tour der Komponente entlang und kommen wieder am Ausgangsknoten in C an. Dies führen wir nun solange fort bis wir wieder am Ausgangspunkt angelangt sind. Wir haben in G also eine Eulersche Tour konstruiert, somit ist auch G Eulersch. Wir müssen aber noch ein konkretes Beispiel angeben. Wir wählen einfach einen Graphen der nur aus einem Knoten besteht. Dieser Graph ist offensichtlich Eulersch. Wir wissen nun also, dass jeder zusammenhängende Graph mit Null Kanten Eulersch ist, somit auch jeder Graph mit einer Kante und somit auch jeder Graph mit zwei Kanten ect. . Diese Graphen sollen natürlich die Voraussetzungen von Satz 10 erfüllen.

Satz 11 *Ein zusammenhängender Graph G enthält genau dann einen offenen Eulerschen Kantenzug, wenn genau zwei Knoten aus G einen ungeraden Knotengrad haben.*

Beweis: Seien U, V die beiden Knoten aus G die einen ungeraden Knotengrad haben. Wir verbinden U und V mit einer weitern Kante w und nennen den neu entstandenen Graphen G'. Die Knoten U, V in G' haben nun einen geraden Knotengrad. In G' sind also nur noch Knoten mit einem geraden Knotengrad enthalten. G' ist also Eulersch. Es gibt also eine Eulersche Tour $Ue_0K_1 \dots K_iwK_{i+1} \dots e_{n-1}K_ne_nU$. Entfernt man nun w in der Eulerschen Tour, so ist der Kantenzug $K_{i+1} \dots e_{n-1}K_ne_nUe_0K_1 \dots K_i$ ein offener Eulerscher Kantenzug.

Definition 20 *Sei G ein Graph und X, Y zwei Kantenzüge. X und Y heissen **kantendisjunkt**, falls sie keine Kanten gemeinsam haben.*

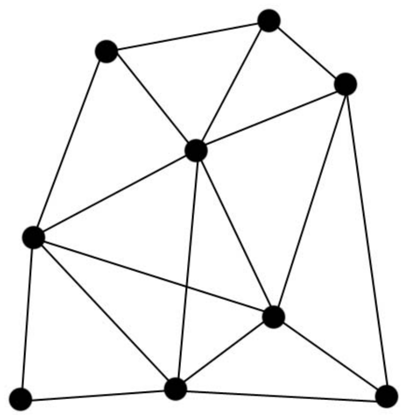
Hier ist ein Beispiel für zwei kantendijunkte Kantenzüge. Es sind sogar kantendisjunkte Wege.



Satz 12 *Sei G ein Graph mit $2k$, $k \geq 1$ Knoten ungeraden Grades, so besteht G aus k paarweise disjunkte Kantenzüge.*

Beweis: Der Beweis geschieht mittels vollständiger Induktion über k. Der Fall $k = 1$ ist gerade die Aussage von Satz 1. Wir nehmen an, dass die Aussage für alle Graphen mit $2k$ Knoten ungeraden Grades bewiesen worden ist. Wir zeigen das die Aussage dann auch für $2(k + 1)$ Knoten ungeraden Grades richtig ist. Sei G ein Graph mit genau $2(k + 1)$ Knoten ungeraden Knotengrades. Seien U, V zwei Knoten, mit einem ungeraden Knotengrad aus G. Wir fügen G eine Kante die in U und V indiziert. Der Knotengrad von U und V wird dann jeweils um 1 erhöht, der Knotengrad ist also gerade. Wir bezeichnen den neuen Graphen mit G'. G' hat also nur noch $2k$ Knoten mit einem ungeraden Knotengrad. Nach der Induktionsvorrausetzung besteht G' aus genau k kantendisjunkten Kantenzügen. Sei X ein Kantenzug der die hinzugefügte Kante enthält. Entfernen wir diese Kante wieder, so zerfällt X in zwei Kantenzüge. G besteht also aus $k + 1$ kantendisjunkten Kantenzügen. Somit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe: Wie oft muss man mindestens den Stift absetzen um die folgende Figur zu zeichnen, ohne dabei eine Kante doppelt zu zeichnen?



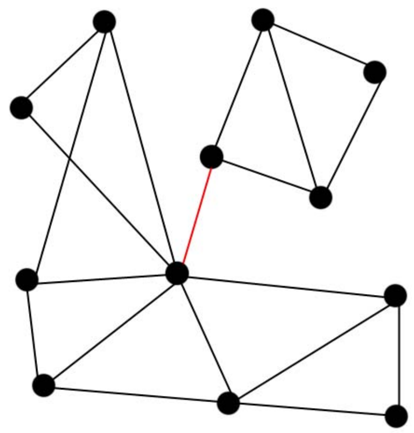
Lösung: Diese Frage ist offensichtlich damit äquivalent damit aus wie vielen kantendisjunkten Kantenzügen dieser Graph besteht. Nach Satz 12 besteht ein Graph mit genau $2k$ Knoten ungeraden Knotengrades aus genau k kantendisjunkten Kantenzügen. Dieser Graph hat genau 6 Knoten ungeraden Knotengrades. Das erste Aufsetzen des Stiftes zählt nicht, als absetzen, als muss man mindestens zweimal den Stift absetzen.

Definition 21 *Sei G ein Graph und e eine Kante, dann ist der Graph $G - e$ der aus G dadurch entsteht, dass man die Kante e entfernt.*[1]

Definition 22 *Sei G ein Graph und e eine Kante. Die Kante e heisst eine **Brücke** falls $G - e$ nicht zusammenhängend ist.*

[1] vgl. Definition 11

Hier ist ein Beispiel einer Brücke in einem Graphen.



Im Folgenden wir ein Algorithmus angegeben wie man in einem Eulerschen Graphen eine Eulersche Tour konstruieren kann.

Der Algorithmus von Fleury

Schritt 1: Man wähle einen beliebigen Knoten K_0.

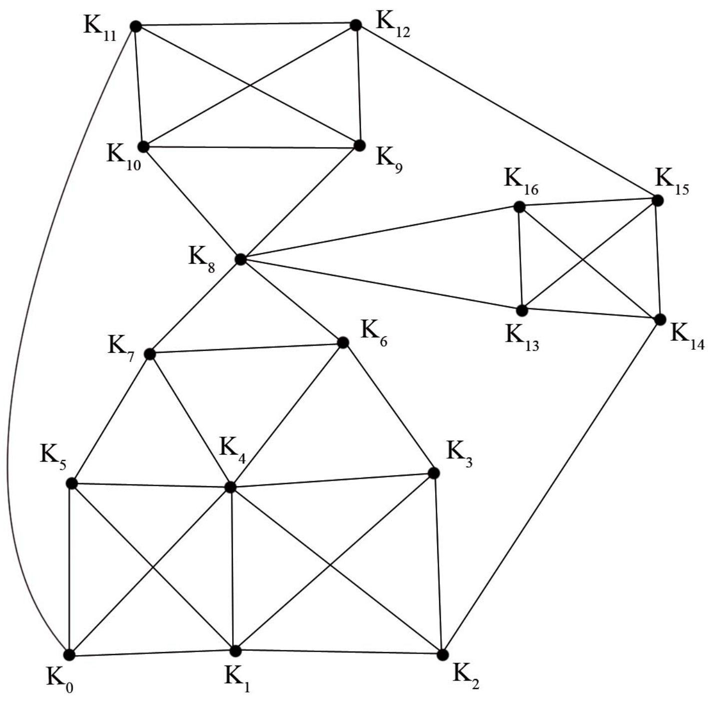
Schritt 2: Wenn der Kantenzug $W_i = K_0 e_1 K_1 \dots e_i K_i$ gewählt worden ist, wähle man eine von $e_1, \dots, e_i$ verschiedene Kante e_{i+1}, so dass e_{i+1} in K_i endet und ausgenommen, es gibt keine alternative, e_{i+1} keine Brücke des Kantengelöschten Graphen $G - \{e_1, \dots, e_i\}$ ist.

Schritt 3: Man beende den Algorithmus, wenn W_i jede Kante von G beinhaltet. Andernfalls ist Schritt 2 zu wiederholen.

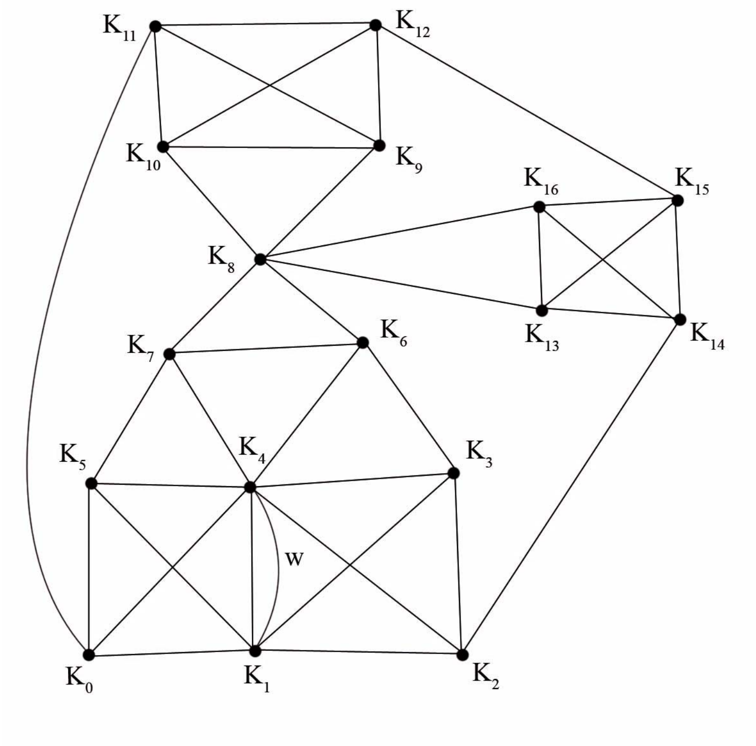
Satz 13 *Der Algorithmus von Fleury erzeugt eine Eulersche Tour in einem Eulerschen Graphen.*

Ohne Beweis!

Aufgabe: Man finde im folgenden Graphen, unter Benutzung des Algorithmus' von Fleury, einen offenen Eulerschen Kantenzug.

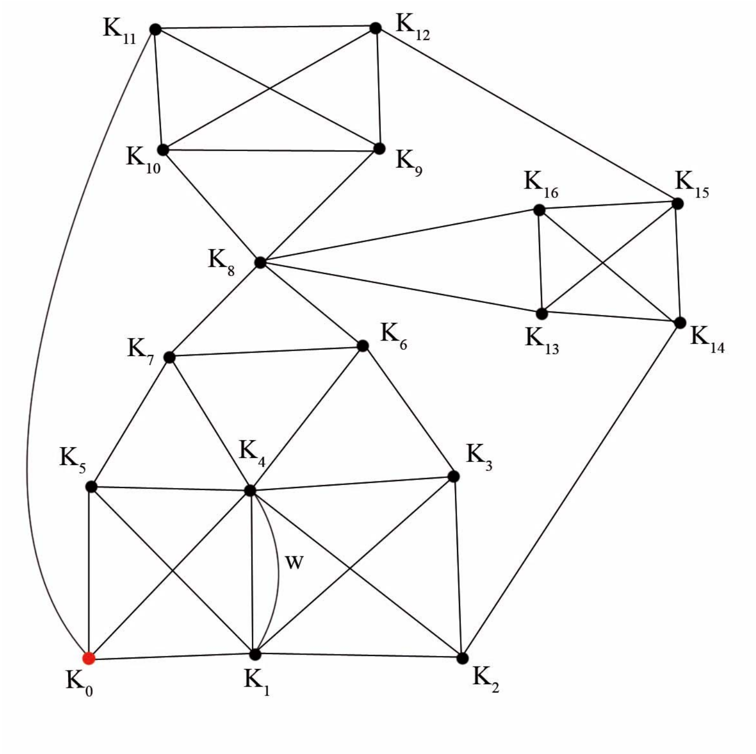


Lösung: Nach Satz 11 besitzt der Graph einen offenen Eulerschen Kantenzug, da K_1 und K_4 die einzigen Knoten mit einem ungeraden Knotengrad sind. Der Algorithmus von Fleury findet, aber eine Eulersche Tour in einem Eulerschen Graphen. Um dieses Problem zu beheben fügen wir den Graphen eine Kante w, die in K_1 und K_4 endet hinzu.

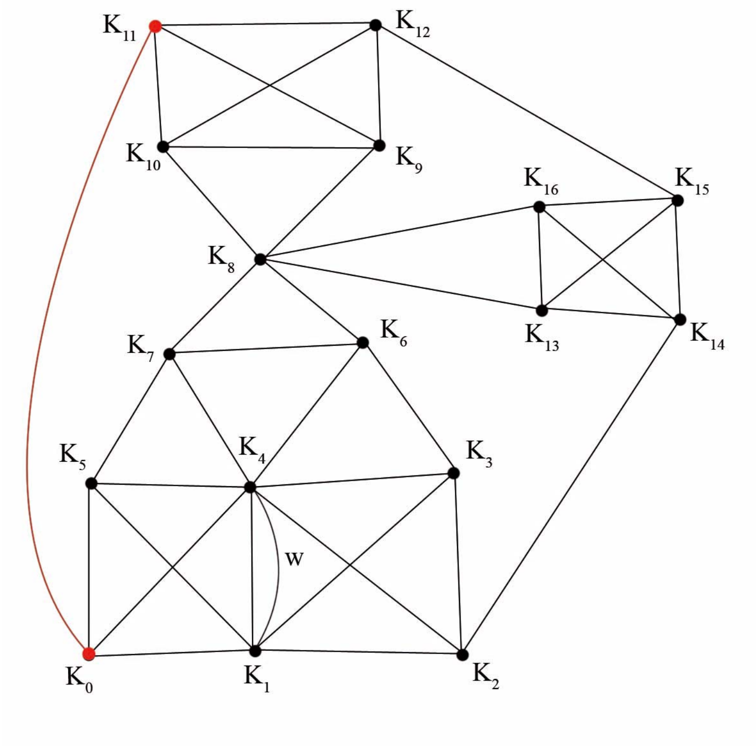


In diesem Graphen haben alle Knoten einen geraden Knotengrad, außerdem ist er zusammenhängend, er besitzt also eine Eulersche Tour.

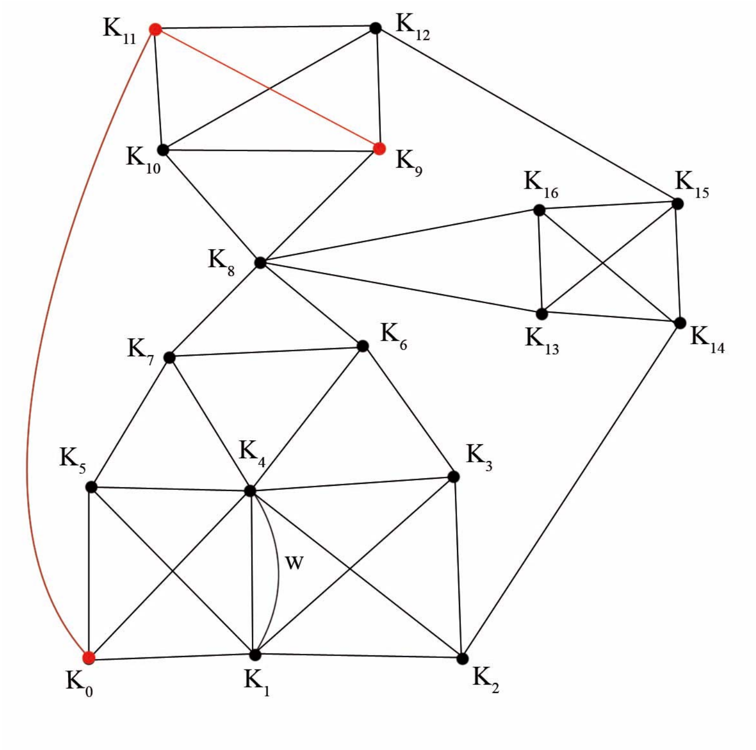
Schritt 1: Man wähle einen beliebigen Knoten K_0. (Die Bezeichnung des ersen Knoten ist egal.)



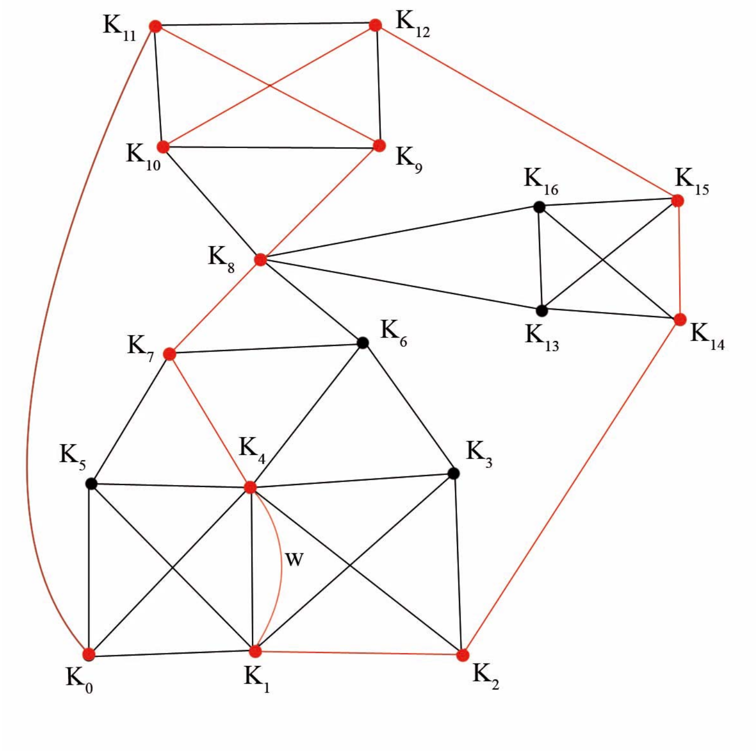
Schritt 2: Nun haben wir den leeren Kantenzug gewählt, also ist der Kantengelöschte Graph, der Graph selbst. Wir wählen uns also eine beliebige Kante, sagen wir K_0K_{11}.



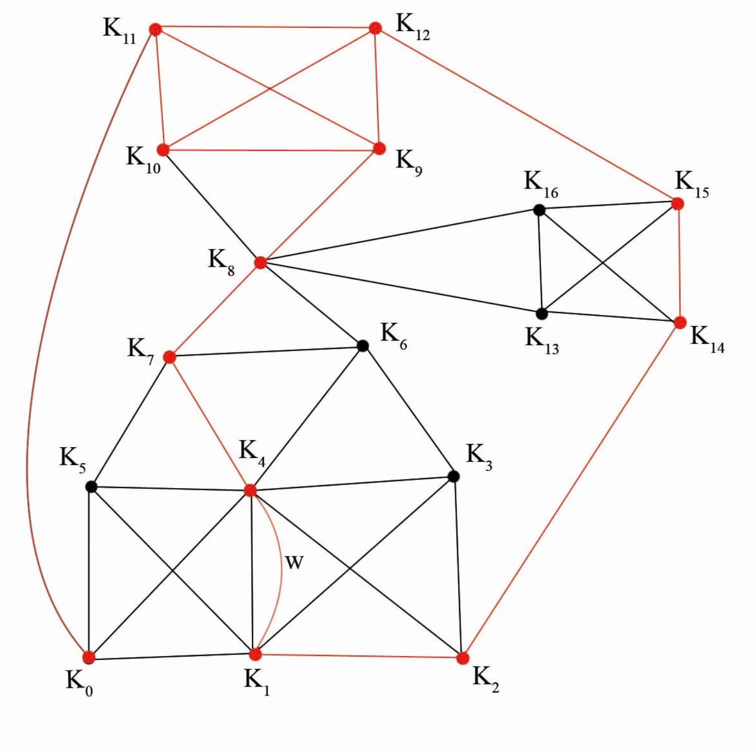
Schritt 2: Wir haben nun den Kantenzug K_0K_{11} gewählt. Der Kantengelöschte Graph besteht nun aus allen Knoten und aus all den Kanten die noch schwarz markiert sind. Wir wählen die Kante $K_{11}K_9$ und haben somit den Kantenzug $K_0K_{11}K_9$ gewählt.



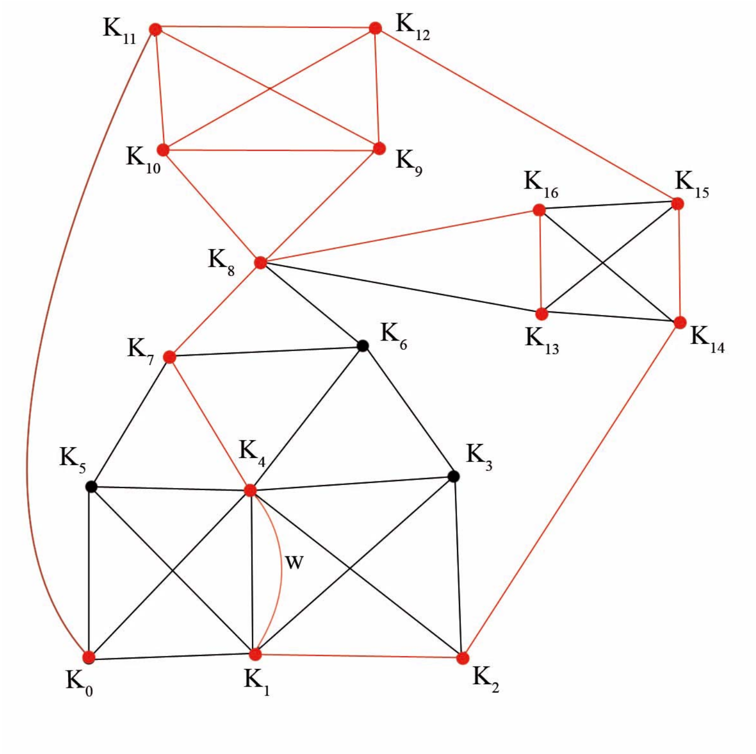
Wir wiederholen Schritt 2 und wählen uns beliebige weitere Kanten, so dass wir den Kantenzug $K_0K_{11}K_9K_8K_7K_4wK_1K_2K_{14}K_{15}K_{12}K_{10}$ erhalten.



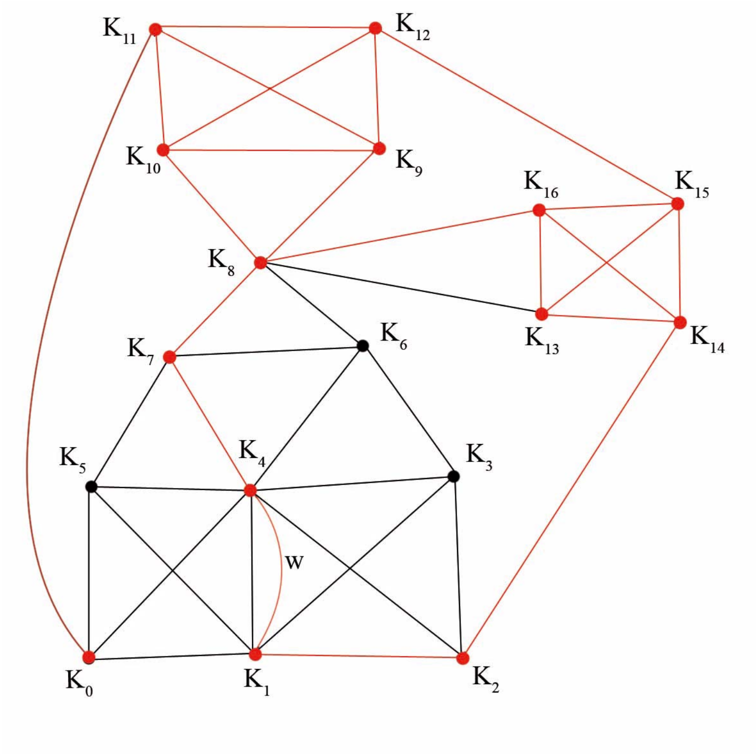
Wir sind also beim Knoten K_{10} angekommen. Der Kantengelöschte Graph ist der Graph der aus den schwarz gefärbten Kanten besteht. Man sieht, dass die Kante $K_{10}K_8$ eine Brücke des Kantengelöschten Graphen ist. Wir dürfen diese Kante also nicht als nächstes wählen. Wir führen den Kantenzug fort ohne dabei die Kante $K_{10}K_8$ zu benutzen. Wir wählen den Kantenzug $K_0K_{11}K_9K_8K_7K_4wK_1K_2K_{14}K_{15}K_{12}K_{10}K_9K_{12}K_{11}K_{10}$



Nun sind wir wieder an K_{10} angelangt. Die einzige Kante an der wir weiter können ist nun eine Brücke. Der Algorithmus von Fleury sagt nun aus, dass wir dann diese Kante gehen sollen. Wir gehen den Kantenzug folgendermaßen weiter
$K_0K_{11}K_9K_8K_7K_4wK_1K_2K_{14}K_{15}K_{12}K_{10}K_9K_{12}K_{11}K_{10}K_8K_{16}K_{13}$



Nun kommen wir wieder an einem Knoten, wo wir nicht jede Kante benutzen können. Die Kante K_8K_{13} ist eine Brücke des Kantengelöschten Graphen und es gibt noch andere Möglichkeiten den Kantenzug fortzusetzen. Wir setzen den Kantenzug folgendermaßen fort $K_0K_{11}K_9K_8K_7K_4wK_1K_2K_{14}K_{15}K_{12}K_{10}K_9K_{12}K_{11}K_{10}K_8K_{16}K_{13}K_{14}K_{16}K_{15}K_{13}$



Nun führen wir den Algorithmus solange weiter bis jede Kante im Kantenzug vorkommt. $K_0K_{11}K_9K_8K_7K_4wK_1K_2K_{14}K_{15}K_{12}K_{10}K_9K_{12}K_{11}K_{10}K_8K_{16}K_{13}K_{14}K_{16}K_{15}$ $K_{13}K_8K_6K_7K_5K_0K_1K_3K_2K_4K_3K_6K_4K_5K_1K_4K_0$. Nun haben wir einen Eulerschen Kantenzug in dem Graphen gefunden. Was wir brauchen ist aber ein offener Eulerscher Kantenzug in dem Graphen, wo die Kante w fehlt. Der Kantenzug den wir gefunden haben ist geschlossen, der Anfangsknoten und der Endknoten stimmen überein. Wir entfernen die Kante w im Kantenzug und starten beim darauffolgenden Knoten. Kommen wir beim Endknoten an, so machen wir weiter wie beim Start, da K_0 zugleich Start- und Endknoten ist. Wir erhalten den folgenden geschlossenen Eulerschen Kantenzug $K_0K_{11}K_9K_8K_7K_4K_1K_2K_{14}K_{15}K_{12}K_{10}K_9K_{12}K_{11}K_{10}K_8K_{16}K_{13}K_{14}K_{16}K_{15}K_{13}K_8K_6K_7$ $K_5K_0K_1K_3K_2K_4K_3K_6K_4K_5K_1K_4K_0$.